Проект урока обобщающего повторения по теме
«Логические задачи» (10–11 класс)

Основная цель урока: сформировать у учащихся умение применять математический аппарат к решению задач, выделять и использовать ключевую информацию из сюжета (условия).

Комментарий для учителя. Содержание урока соответствует ФГОС и может быть использовано учителем на любом этапе изучения школьного курса математики. Не требует введения в курс специальных алгоритмов решения задач, классификаций и методов решения.

Основной блок заданий

1.1. Каждый из семи гномов подарил Белоснежке ягоды. Первый подарил Белоснежке 8 ягод. Каждый следующий гном, если он был в шапочке, дарил Белоснежке на одну ягоду больше предыдущего. Если же гном был без шапочки, то он дарил на одну ягоду меньше предыдущего. Всего Белоснежка получила 75 ягод. Сколько гномов было без шапочки, если первый был в шапочке?

Краткое решение.

Рассмотрим случай, когда гномы дают наибольшее количество ягод, то есть когда они все с шапками. Получаем 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 77, не подходит. Ягод должно быть на 2 меньше. Это означает, что хотя бы один гном без шапки есть. Заметим, что замена гнома с шапкой на гнома без шапки уменьшает количество ягод от всех последующих гномов на 2. Это означает, что у последнего гнома на 2 ягоды меньше. Но чтобы сумма сошлась, у остальных тогда должно остаться максимальное значение. Значит, все гномы, кроме последнего, в шапках; в этом случае получается нужное количество ягод. Таким образом, без шапки был один гном.

1.2.В обменном пункте можно совершить одну из двух операций:

1) за 3 золотых монеты получить 4 серебряных и одну медную;
2) за 6 серебряных монет получить 4 золотых и одну медную.

У Николы были только серебряные монеты. После посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 35 медных. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николы?

Краткое решение.

Пусть Никола сделал сначала x операций второго типа, а затем y операций первого типа. Так как количество золотых монет не изменилось, то $4x - 3y = 0$, а так как медных стало на 35 больше, то $x + y = 35$

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0, \\ x + y = 35; \end{cases} \begin{cases} x = 15, \\ y = 20. \end{cases}$$

Тогда серебряных монет стало на $4y - 6x = 80 - 90 = -10$ больше, то есть на 10 меньше.
Комментарий для учителя. Эта задача представляет интерес для развития математических способностей тем, что введение переменных связано не с количеством монет, а с теми операциями, которые совершаются.

1.3. Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько этажей в доме, если всего в нём 110 квартир?

Краткое решение.

Число квартир, этажей и подъездов выражается целым числом. Число 110 раскладывается в произведение простых чисел 2, 5 и 11, следовательно, в доме должно быть 2 подъезда, 5 квартир на этаже и 11 этажей.

1.4. Прямоугольник разбит на четыре меньших прямоугольника двумя прямолинейными разрезами. Периметры трёх из них, начиная с левого верхнего и далее по часовой стрелке, равны 24, 28 и 16. Найдите периметр четвёртого прямоугольника.

Краткое решение.

Введём обозначения, как показано на рисунке. Периметр верхнего левого прямоугольника равен 24, поэтому $a + c = 12$, аналогично, $a + d = 14$. Значит, $c = d - 2$.

	c	d
a	24	28
b	?	16

Кроме того, $d + b = 8$, следовательно, искомый периметр равен

$$2(c + b) = 2(d - 2 + 8 - d) = 12.$$

Комментарий для учителя. Важно обратить внимание ребят на то, что мы, по сути, составляли систему уравнений (условий), но не решали её. Необходимость находить значение каждой из переменной отсутствует.

1.5. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

Краткое решение.

а) Задуманные числа 2, 2, 2, 2 дают требуемый набор, записанный на доске.

Комментарий для учителя. Важно обратить внимание учащихся, что такой набор не единственный. Подойдёт, например, 2, 2, 4.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе – это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе – это сумма всех задуманных чисел. Но среди чисел записанного набора должна быть обязательно и сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22 - 1 = 21$. Однако, этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 9 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Кроме того, числа 10 и 11 меньше, чем сумма двух чисел 9, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $52 - 9 - 10 - 11 = 22$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 9, оставшиеся задуманные числа – это 11 и 11 или 22. Для задуманных чисел 9, 10, 11, 11, 11 и 9, 10, 11, 22 на доске будет записан набор, данный в условии.

Комментарий для учителя. «Так как наименьшее задуманное число равно 9, оставшиеся задуманные числа – это 11 и 11 или 22» – это очень важный момент обоснования. Число 22 в виде суммы других чисел можно получить разными способами, а в данном случае его нужно получить исходя из того, что 9, 10, 11 уже в наборе задуманных чисел.

Дополнительный блок заданий

2.1.Кузнечик прыгает вдоль координатной прямой в любом направлении на единичный отрезок за прыжок. Сколько существует различных точек на координатной прямой, в которых кузнечик может оказаться, сделав ровно 6 прыжков, начав прыгать из начала координат?

Краткое решение.

Заметим, что кузнечик может оказаться только в точках с чётными координатами, поскольку число прыжков, которое он делает, чётно. Максимально кузнечик может оказаться в точках, модуль которых не превышает шести. Таким образом, кузнечик может оказаться в точках −6, −4, −2, 0, 2, 4 и 6; всего 7 точек.

Осталось показать, что все эти точки достигаются.

-6: $0 \to -1 \to -2 \ \to -3 \ \to -4 \ \to -5 \to -6$
-4: $0 \to -1 \to -2 \ \to -3 \ \to -4 \ \to -5 \to -4$
-2: $0 \to -1 \to -2 \ \to -3 \ \to -4 \ \to -3 \to -2$
0: $0 \to -1 \to -2 \ \to -3 \ \to -2 \ \to -1 \to 0$
2: $0 \to -1 \to -2 \ \to -1 \ \to 0 \ \to 1 \to 2$
4: $0 \to -1 \to 0 \ \to 1 \ \to 2 \ \to 3 \to 4$
6: $0 \to 1 \to 2 \ \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$

Домашнее задание(ориентировочное время выполнения **20 минут**)

1. В обменном пункте можно совершить одну из двух операций:
   - за 2 золотых монеты получить 3 серебряных и одну медную;
   - за 5 серебряных монет получить 3 золотых и одну медную.

У Николая были только серебряные монеты. После нескольких посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 50 медных. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николая?
2. Прямоугольник разбит на четыре меньших прямоугольника двумя прямолинейными разрезами. Площади трёх из них, начиная с левого верхнего и далее по часовой стрелке, равны 18, 15 и 20. Найдите площадь четвёртого прямоугольника.
3. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.
а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22?
в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 41.

Краткое решение.

1. Пусть Николай сделал сначала x операций второго типа, а затем y операций первого типа. Так как количество золотых монет не изменилось, то $3x - 2y = 0$, а так как медных стало на 50 больше, то $x + y = 50$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0, \\ x + y = 50; \end{cases} \begin{cases} x = 20, \\ y = 30. \end{cases}$$

Тогда серебряных монет стало на $3y - 5x = 90 - 100 = -10$ больше, то есть на 10 меньше.
2. Введём обозначения, как показано на рисунке. Площадь верхнего левого прямоугольника равна 18, поэтому $a \cdot c = 18$, аналогично, $a \cdot d = 15$. Значит, $\frac{c}{d} = \frac{18}{15}$.

a	18	15
b	?	20

Кроме того, $d \cdot b = 20$, следовательно, искомая площадь равна $b \cdot c = \frac{20}{d} \cdot \frac{18}{15} = 24$.

3. а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе – это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе – это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22 - 1 = 21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 – наименьшее число в наборе – является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе – это сумма всех задуманных чисел. Кроме того, числа 9 и 11 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41 - 7 - 9 - 11 = 14$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 7 и 7 или 14. Для задуманных чисел 7, 7, 7, 9, 11 и 7, 9, 11, 14 на доске будет записан набор, данный в условии.