

# Ответы и решения олимпиадных задач по математике 7 – 9 класс

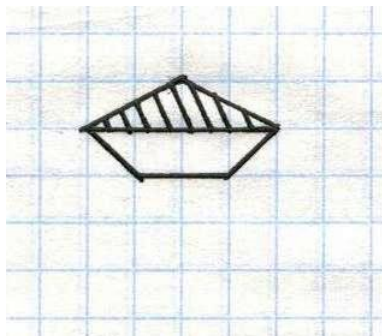
## 7 класс

**Задача №1** Три медвежонка делили три кусочка сыра массой 10 г, 12 г и 15 г. Лиса стала им помогать. Она может от любых двух кусочков одновременно откусить и съесть по 1 г сыра. Сможет ли лиса оставить медвежатам равные кусочки сыра?

**Ответ.** Сможет. **Решение.** Приведем один из возможных примеров того, как лиса могла это сделать. Для удобства запишем результаты «работы» лисы в таблицу.

10	12	15	Как можно догадаться до решения. Сначала попытаются уравнять только два куска сыра, а потом уже все три.
9	12	14	
8	12	13	Критерии проверки.
7	12	12	• Верный алгоритм (неважно какой длины, записанный словами или таблицей) – 7 баллов.
7	11	11	• Верный в целом алгоритм с пропущенными звеньями – 5 баллов.
7	10	10	• Показано, как уравнять два куска, но дальше продвижений нет – 2 балла.
7	9	9	• Только ответ «да» или «сможет» – 0 баллов.
7	8	8	
7	7	7	

**Задача №2** На клетчатой бумаге изображена чаша с крышкой (см. рисунок). На покраску крышки израсходовали 30 гр. краски. Сколько ещё нужно грамм краски для покраски чашки? Ответ обосновать.



**Решение:** Площадь закрашенной части составляет ровно 2 клеточки. Тогда на покраску 1 клетки расходуется 15 грамм краски. Площадь "чашки" составляет 3 клеточки. Тогда на ее покраску потребуется ещё 45 грамм краски. **Ответ:** 45гр

**Задача №3** Известно, что среди членов правительства Лимонии (а в нем всего 20 человек) заведомо имеется хотя бы одна женщина, а также что из

любых двух человек хотя бы один - мужчина. Сколько в правительстве мужчин?

**Решение:** Заметим, что в правительстве Лимонии ровно одна женщина чиновник. Действительно, по условию одна женщина там есть; но двух женщин там быть не может - тогда бы это противоречило бы условию (так как какую бы пару не составляли из чиновников, в ней обязательно должен быть хотя бы один мужчина). Значит, женщин в правительстве - 1 человек, а мужчин -  $20-1=19$  человек.

**Ответ:** 19 мужчин.

**Задача 4** Расставьте скобки, чтобы равенство стало верным:

$$0,5+0,5:0,5+0,5:0,5=5$$

**Ответ:**  $((0,5+0,5):0,5+0,5):0,5=5$ .

**Задача №5** Четверо ребят - Алексей, Борис, Владимир и Григорий участвовали в лыжных гонках. На следующий день на вопрос, кто какое место занял, они ответили так:

Алексей: Я не был ни первым и ни последним;

Борис: Я не был последним;

Владимир: Я был первым;

Григорий: Я был последним.

Известно, что три из этих ответов были правдивыми, а один - ложью. Кто сказал правду? Кто был первым?

**Решение:** Предположим, что солгал Алексей. Тогда получается, что он был первым или последним. тогда солгали ещё Владимир и или Григорий, что противоречит условию. Пусть солгал Борис. Тогда он был последним. Но Григорий утверждал, что он был последним. Значит, предположение не верно. Пусть солгал Владимир. тогда он не был первым. В этом случае условия задачи выполняются.

**Ответ:** правду сказали Алексей, Борис, Григорий. Первым был Борис.

## 8 класс

1. В классе 37 учеников. Докажите, что среди них найдутся 4 ученика, отмечающих день

рождения в один месяц.

**Ответ:** Если в каждый месяц родилось не более 3 учеников, то всего учеников будет не больше 36. А по условию их 37, значит, такого быть не может. Поэтому найдется 4 ученика, отмечающих день рождения в один месяц.

2. Длины сторон треугольника равны 6,82 м и 0,31 м, а длина третьей стороны выражена целым числом метров. Найти длину третьей стороны.

**Решение:**  $a, b, c$  – стороны треугольника:  $a = 6,82; b = 0,31$ ; известно, что  $a - b < c < a + b$ , то есть  $6,51 < c < 7,13$ , так как  $c \in \mathbb{Z}$ , то  $c = 7$  м.

3. Разложите на множители:  $4(a^2 + b^2) + 21b^2 - 20ab - 36$ .

**Ответ:**  $(2a - 5b - 6)(2a - 5b + 6)$ .

4. Четырех кошек взвесили попарно во всех возможных комбинациях. Получились массы 7 кг, 8 кг, 9 кг, 10 кг, 11 кг, 12 кг. Какова общая масса всех кошек?

**Решение:**

Пусть масса кошек  $a, b, c, d$  соответственно, тогда

$$a + b = 7$$

$$a + c = 8$$

$$a + d = 9 \Rightarrow 3a + 3b + 3c + 3d = 57, \text{ откуда масса}$$

$$b + c = 10 \quad 4 \text{ кошек равна: } a + b + c + d = 19 \text{ (кг).}$$

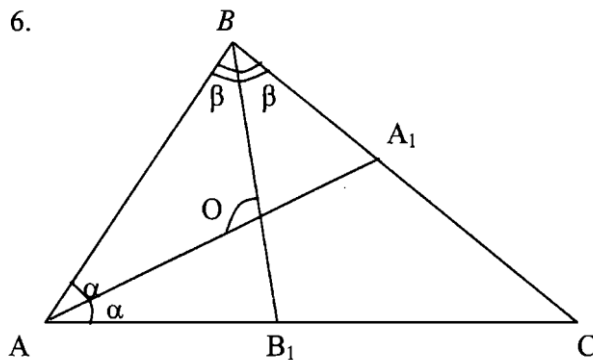
$$b + d = 11$$

$$c + d = 12$$

5. В  $\triangle ABC$  биссектрисы углов  $A$  и  $B$  пересекаются под углом  $128^\circ$ . Найдите угол  $C$ .

**Решение:**

6.



$$2\alpha + 2\beta + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 2(\alpha + \beta)$$

$$\angle AOB = 128^\circ;$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ - 128^\circ = 52^\circ,$$

$$\text{значит, } \angle C = 180^\circ - 2 \cdot 52^\circ = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ.$$

$$\angle C = 76^\circ.$$

## 9 класс

1. Решить уравнение:  $x^2 + xy + y^2 - 2x + 2y + 4 = 0$

**Решение:** Умножим на 2 обе части уравнения и сгруппируем. В итоге получим:  $(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 4y + 4) = 0$ ,

$$(x + y)^2 + (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 0, \quad x = 2; \quad y = -2.$$

2. Автомобиль проехал 600 км. Первую половину пути он двигался со скоростью 100 км/ч, а вторую – 60 км/ч. Найдите среднюю скорость движения автомобиля.

**Решение:**

2.  $600 : 2 = 300$  (км) — половина пути;

$300 : 100 = 3$  (ч) — время, затраченное на первую половину пути;

$300 : 60 = 5$  (ч) — время, затраченное на вторую половину пути;

$3 + 5 = 8$  (ч) — время движения автомобиля;

$600 : 8 = 75$  (км/ч) — средняя скорость движения автомобиля.

Ответ: 75 км/ч.

3. Равнобокая трапеция  $ABCD$  разбивается диагональю  $AC$  на 2 равнобедренных треугольника. Определите углы трапеции.

**Решение:**

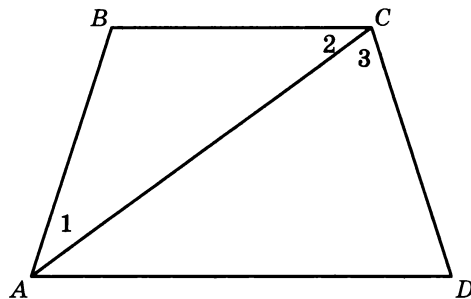


Рис. 75

3. Так как  $\angle B > 90^\circ$ , то  $\angle 1 = \angle 2$  (см. рис. 75). Но  $BC \parallel AD$ ,  $AC$  — секущая, значит,  $\angle CAD = \angle 2$ . Так как  $\angle 3 \neq \angle 2$  (иначе  $\angle A = \angle C$ , чего не может быть), то  $\angle 3 = \angle D$ . Но  $\angle D = \angle A$ , поэтому  $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$ , тогда  $\angle 3 = 2 \cdot \angle 1 = 2 \cdot \angle 2$ . В результате имеем:  $\angle 2 + \angle 3 + \angle 3 = 180^\circ$ ;  $\angle 2 + 2 \cdot \angle 2 + 2 \cdot \angle 2 = 5 \cdot \angle 2 = 180^\circ$ ; откуда:  $\angle 2 = 36^\circ$ . Тогда углы трапеции будут  $72^\circ, 108^\circ, 108^\circ, 72^\circ$ .

Ответ:  $72^\circ$  и  $108^\circ$ .

4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} (3x + y)^2 + 2(x - y)^2 = 96, \\ 3x + y = 2(x - y). \end{cases}$$

Решение:

Введем новые переменные:  $u = 3x + y$ ,  $v = x - y$ ; решим систему уравнений относительно переменных  $u$  и  $v$ . Затем найдем  $x$  и  $y$ .

5. Четверо ребят – Алексей, Борис, Владимир и Григорий участвовали в лыжных гонках.

На следующий день, на вопрос кто какое место занял, они ответили так:

Алексей: Я не был ни первым и ни последним;

Борис: Я не был последним;

Владимир: Я был первым;

Григорий: Я был последним.

Известно, что три из этих ответов были правдивыми, а один – ложью. Кто сказал правду? Кто был первым?

**Решение:**

Предположим, что солгал Алексей. Тогда получается, что он был первым или последним. Значит, солгали еще Владимир или Григорий. А это противоречит тому, что солгал всего один из ребят. Пусть солгал Борис. Тогда он был последним. Но Григорий также утверждал, что он был последним. Значит, данного случая также не может быть. Пусть солгал Владимир. Тогда он был не первым. В этом случае все получается и первым тогда будет Борис. Последний случай, когда солгал Григорий, быть не может, так как тогда последним никто из ребят не был.

Отв ет: правду сказали Алексей, Борис, Григорий. Первым был Борис.

6. Найдите четыре последовательных натуральных числа, произведение которых равно 1680.

**Решение:**

6. Пусть искомые числа  $x; x+1; x+2; x+3$ , тогда

$$x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) = 1680$$

$$(x^2 + 3x) \cdot (x^2 + 3x + 2) = 1680,$$

пусть  $x^2 + 3x = t$

$$t^2 + 2t - 1680 = 0$$

$t_1 = 40$   $t_2 = -42$ , откуда

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 40 = 0 \\ x^2 + 3x + 42 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 5; \quad x_2 = -8 \notin N.$$

Значит, искомые числа 5; 6; 7; 8.