Министерство образования и науки УР, ММЦ УР, ИМИТиФ УдГУ
XLII Всероссийская математическая олимпиада школьников
Муниципальный этап
7 класс

7.1. При строительстве стадиона для проведения чемпионата мира по футболу 2018 года неожиданно выяснилось, что объём строительных работ увеличивается на 80%. Руководитель пообещал, что производительность труда рабочих будет увеличена на 20%. На сколько процентов нужно увеличить число рабочих, чтобы время выполнения работы осталось тем же? Производительность труда всех рабочих одинакова.

7.2. Дан квадрат 7×7 клеток. Расставьте в клетках этого квадрата плюсы и минусы так, чтобы в любом квадрате 3×3 оказалось ровно 5 минусов.

7.3. Поезд состоит из локомотива и пяти вагонов **I, II, III, IV и V.** Сколькими способами можно расставить эти вагоны при условии, что локомотив стоит первым, I вагон должен быть ближе к локомотиву, чем II, а порядок остальных вагонов не важен?

7.4. Из клетчатого листа бумаги по линиям сетки вырезали четыре прямоугольника с периметрами 6, 8, 10 и 12. Из этих прямоугольников можно склеить по частям их границ единую клетчатую (состоящую из единичных клеток) фигуру. Какой наибольший периметр может иметь эта фигура? Клетки — квадраты со стороной 1.

7.5. Доказать что из любых девяти целых чисел можно найти четыре, сумма которых делится на 4.

Министерство образования и науки УР, ММЦ УР, ИМИТиФ УдГУ
XLII Всероссийская математическая олимпиада школьников
Муниципальный этап
7 класс

7.1. При строительстве стадиона для проведения чемпионата мира по футболу 2018 года неожиданно выяснилось, что объём строительных работ увеличивается на 80%. Руководитель пообещал, что производительность труда рабочих будет увеличена на 20%. На сколько процентов нужно увеличить число рабочих, чтобы время выполнения работы осталось тем же? Производительность труда всех рабочих одинакова.

7.2. Дан квадрат 7×7 клеток. Расставьте в клетках этого квадрата плюсы и минусы так, чтобы в любом квадрате 3×3 оказалось ровно 5 минусов.

7.3. Поезд состоит из локомотива и пяти вагонов **I, II, III, IV и V.** Сколькими способами можно расставить эти вагоны при условии, что локомотив стоит первым, I вагон должен быть ближе к локомотиву, чем II, а порядок остальных вагонов не важен?

7.4. Из клетчатого листа бумаги по линиям сетки вырезали четыре прямоугольника с периметрами 6, 8, 10 и 12. Из этих прямоугольников можно склеить по частям их границ единую клетчатую (состоящую из единичных клеток) фигуру. Какой наибольший периметр может иметь эта фигура? Клетки — квадраты со стороной 1.

7.5. Доказать что из любых девяти целых чисел можно найти четыре, сумма которых делится на 4.

Министерство образования и науки УР, ММЦ УР, ИМИТиФ УдГУ
XLII Всероссийская математическая олимпиада школьников
Муниципальный этап
8 класс

8.1. Ткань была продана за три дня. В первый день было продано 2/5 всего, во второй - 30% всего, а в третий - 81м. Сколько было ткани?

8.2. Из натуральных чисел от 99 до 2015 вычеркнули все числа, делящиеся на 5. Какой цифрой будет оканчиваться произведение оставшихся чисел?

8.3. В равнобедренном треугольнике *ABC* (*AB*=*AC*) угол при вершине *A* равен 30º. На стороне *AB* отмечена точка *Q*, отличная от *B*, а на медиане *AD* отмечена точка *P* так, что *PC*=*PQ*. Найдите величину угла *PQC*.

8.4. Три пчелки собирают нектар с 88 садовых цветов. На каждый цветок обязательно прилетала хотя бы одна пчелка. Каждая из пчел посетила ровно 54 цветка. Назовем цветок сладким, если его посетили все три пчелы, и горьким, если ровно одна. Каких цветов из этих 88 больше: сладких или горьких, и на сколько?

8.5. Петя выписывает числа: начав со своего возраста (в годах), он каждое следующее получает прибавлением к предыдущему наибольшей цифры в нем. Встретится ли среди выписанных число 100996?

Министерство образования и науки УР, ММЦ УР, ИМИТиФ УдГУ
XLII Всероссийская математическая олимпиада школьников
Муниципальный этап
8 класс

8.1. Ткань была продана за три дня. В первый день было продано 2/5 всего, во второй - 30% всего, а в третий - 81м. Сколько было ткани?

8.2. Из натуральных чисел от 99 до 2015 вычеркнули все числа, делящиеся на 5. Какой цифрой будет оканчиваться произведение оставшихся чисел?

8.3. В равнобедренном треугольнике *ABC* (*AB*=*AC*) угол при вершине *A* равен 30º. На стороне *AB* отмечена точка *Q*, отличная от *B*, а на медиане *AD* отмечена точка *P* так, что *PC*=*PQ*. Найдите величину угла *PQC*.

8.4. Три пчелки собирают нектар с 88 садовых цветов. На каждый цветок обязательно прилетала хотя бы одна пчелка. Каждая из пчел посетила ровно 54 цветка. Назовем цветок сладким, если его посетили все три пчелы, и горьким, если ровно одна. Каких цветов из этих 88 больше: сладких или горьких, и на сколько?

8.5. Петя выписывает числа: начав со своего возраста (в годах), он каждое следующее получает прибавлением к предыдущему наибольшей цифры в нем. Встретится ли среди выписанных число 100996?

Министерство образования и науки УР, ММЦ УР, ИМИТиФ УдГУ
XLII Всероссийская математическая олимпиада школьников
Муниципальный этап
9 класс

9.1. Существуют ли целые числа, для которых имеют место равенства: $x \cdot y = 4747$, $x - y = -54$?

9.2. На координатной плоскости укажите множество точек, удовлетворяющих равенству: $|y| = \dfrac{x|x| - |x|}{x}$.

9.3. На стороне AD квадрата $ABCD$, как на диаметре, построена окружность. Из вершины C проведена касательная к окружности. Через точку касания P $(P \neq D)$ и вершину квадрата A проведена прямая. Докажите, что она делит сторону BC пополам.

9.4. Имеется прямоугольная пластина массой 10*г*. На какое наименьшее количество частей можно её разрезать, чтобы с их помощью можно было бы, используя чашечные весы, определить массу любого предмета в 1*г*, 2*г*, 3*г*,…,10*г*?

9.5. На столе лежат 2015 монет. Двое играют в следующую игру: ходят по очереди; за ход первый может взять со стола любое нечетное число монет от 1 до 99, второй любое четное число монет от 2 до 100. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.
Кто выиграет при правильной игре?

Министерство образования и науки УР, ММЦ УР, ИМИТиФ УдГУ
XLII Всероссийская математическая олимпиада школьников
Муниципальный этап
9 класс

9.1. Существуют ли целые числа, для которых имеют место равенства: $x \cdot y = 4747$, $x - y = -54$?

9.2. На координатной плоскости укажите множество точек, удовлетворяющих равенству: $|y| = \dfrac{x|x| - |x|}{x}$.

9.3. На стороне AD квадрата $ABCD$, как на диаметре, построена окружность. Из вершины C проведена касательная к окружности. Через точку касания P $(P \neq D)$ и вершину квадрата A проведена прямая. Докажите, что она делит сторону BC пополам.

9.4. Имеется прямоугольная пластина массой 10*г*. На какое наименьшее количество частей можно её разрезать, чтобы с их помощью можно было бы, используя чашечные весы, определить массу любого предмета в 1*г*, 2*г*, 3*г*,…,10*г*?

9.5. На столе лежат 2015 монет. Двое играют в следующую игру: ходят по очереди; за ход первый может взять со стола любое нечетное число монет от 1 до 99, второй любое четное число монет от 2 до 100. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.
Кто выиграет при правильной игре?

Министерство образования и науки УР, ММЦ УР, ИМИТиФ УдГУ
XLII Всероссийская математическая олимпиада школьников
Муниципальный этап
10 класс

10.1. Известно, что разность кубов корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + 6c = 0$ равна 2015. Сколько корней имеет уравнение $3ax^2 + 2bx + 8c = 0$?

10.2. Несколько учащихся ушли из лицея и несколько пришли. В результате число учащихся уменьшилось на 10%, а доля мальчиков в лицее увеличилась с 50% до 55%. Увеличилось или уменьшилось число мальчиков?

10.3. Составьте из целых чисел две прогрессии: арифметическую a_1, a_2, a_3, a_4 и геометрическую b_1, b_2, b_3, b_4, такие что
$$\begin{cases} a_1+b_1=27 \\ a_2+b_2=27 \\ a_3+b_3=39 \\ a_4+b_4=87 \end{cases}.$$

10.4. Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена высота CD, и в треугольники ACD и BCD вписаны окружности с центрами P и Q. Общая внешняя касательная к этим окружностям пересекает катеты AC и BC в точках M и N. Докажите, что треугольники CMN и CBA подобны.

10.5. Доску размера 2016×2016 клеток, раскрашенную в шахматном порядке, произвольным образом разрезали по линиям сетки на квадраты со сторонами нечётной длины. В каждом квадрате отметили центральную клетку. Доказать, что среди отмеченных клеток поровну чёрных и белых.

Министерство образования и науки УР, ММЦ УР, ИМИТиФ УдГУ
XLII Всероссийская математическая олимпиада школьников
Муниципальный этап
10 класс

10.1. Известно, что разность кубов корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + 6c = 0$ равна 2015. Сколько корней имеет уравнение $3ax^2 + 2bx + 8c = 0$?

10.2. Несколько учащихся ушли из лицея и несколько пришли. В результате число учащихся уменьшилось на 10%, а доля мальчиков в лицее увеличилась с 50% до 55%. Увеличилось или уменьшилось число мальчиков?

10.3. Составьте из целых чисел две прогрессии: арифметическую a_1, a_2, a_3, a_4 и геометрическую b_1, b_2, b_3, b_4, такие что
$$\begin{cases} a_1+b_1=27 \\ a_2+b_2=27 \\ a_3+b_3=39 \\ a_4+b_4=87 \end{cases}.$$

10.4. Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена высота CD, и в треугольники ACD и BCD вписаны окружности с центрами P и Q. Общая внешняя касательная к этим окружностям пересекает катеты AC и BC в точках M и N. Докажите, что треугольники CMN и CBA подобны.

10.5. Доску размера 2016×2016 клеток, раскрашенную в шахматном порядке, произвольным образом разрезали по линиям сетки на квадраты со сторонами нечётной длины. В каждом квадрате отметили центральную клетку. Доказать, что среди отмеченных клеток поровну чёрных и белых.

Министерство образования и науки УР, ММЦ УР, ИМИТиФ УдГУ
XLII Всероссийская математическая олимпиада школьников
Муниципальный этап
11 класс

11.1. Графики функций $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ пересекаются в точке с координатами (1; 1). Что больше $a^5 + d^6$ или $c^6 - b^5$.

11.2. Решите уравнение $\cos x - \sin x = \sin^5 x - \cos^5 x$.

11.3. Перед боем у Василия Ивановича и Петьки было поровну патронов. Василий Иванович израсходовал в бою в 8 раз меньше патронов, чем Петька, а осталось у него в 9 раз больше патронов, чем у Петьки. Доказать, что изначально количество патронов у Василия Ивановича делилось на 71.

11.4. В окружность с центром в точке O вписан прямоугольный треугольник с гипотенузой AB. Пусть K — середина дуги BC, которая не содержит точку A, N — середина отрезка AC, M — точка пересечения луча KN с окружностью. В точках A и C проведены касательные к окружности, которые пересекаются в точке E. Докажите, что $\angle EMK = 90^\circ$.

11.5. 1 сентября школьник написал сочинение без ошибок. На следующий день два его товарища переписали его сочинение. Но при переписывании они сделали несколько ошибок – каждый свои. На следующий день каждое сочинение предыдущего дня было переписано двумя школьниками. Так продолжалось весь сентябрь. При каждом переписывании предыдущие ошибки не исправляются и, возможно, делаются новые. Никто не переписывал сочинение более одного раза. 15 сентября в каждом новом сочинении оказалось не менее 10 ошибок. Докажите, что был такой день, когда в сумме было допущено не менее 11 новых ошибок.

Министерство образования и науки УР, ММЦ УР, ИМИТиФ УдГУ
XLII Всероссийская математическая олимпиада школьников
Муниципальный этап
11 класс

11.1. Графики функций $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ пересекаются в точке с координатами (1; 1). Что больше $a^5 + d^6$ или $c^6 - b^5$.

11.2. Решите уравнение $\cos x - \sin x = \sin^5 x - \cos^5 x$.

11.3. Перед боем у Василия Ивановича и Петьки было поровну патронов. Василий Иванович израсходовал в бою в 8 раз меньше патронов, чем Петька, а осталось у него в 9 раз больше патронов, чем у Петьки. Доказать, что изначально количество патронов у Василия Ивановича делилось на 71.

11.4. В окружность с центром в точке O вписан прямоугольный треугольник с гипотенузой AB. Пусть K — середина дуги BC, которая не содержит точку A, N — середина отрезка AC, M — точка пересечения луча KN с окружностью. В точках A и C проведены касательные к окружности, которые пересекаются в точке E. Докажите, что $\angle EMK = 90^\circ$.

11.5. 1 сентября школьник написал сочинение без ошибок. На следующий день два его товарища переписали его сочинение. Но при переписывании они сделали несколько ошибок – каждый свои. На следующий день каждое сочинение предыдущего дня было переписано двумя школьниками. Так продолжалось весь сентябрь. При каждом переписывании предыдущие ошибки не исправляются и, возможно, делаются новые. Никто не переписывал сочинение более одного раза. 15 сентября в каждом новом сочинении оказалось не менее 10 ошибок. Докажите, что был такой день, когда в сумме было допущено не менее 11 новых ошибок.